

具有信号依赖 Fokker–Planck 型扩散的 Keller–Segel 系统: 解的定性理论与辅助函数比较方法*

江杰[†]

中国科学院精密测量科学与技术创新研究院
武汉物理与数学研究所, 武汉 430071

摘要

本文综述具有信号依赖 Fokker–Planck 型扩散的 Keller–Segel 系统的近期研究进展. 按运动性函数的渐近行为和单调性, 梳理抛物–椭圆与完全抛物模型在整体存在性, 一致有界性, 临界质量, 无穷大时间无界性及稳定化方面的主要结果. 重点介绍以椭圆预解算子和关键恒等式为基础的辅助函数比较方法, 说明可比较量构造, 估计闭合与正则性提升之间的联系, 并讨论非齐次模型中的阻尼作用及若干开放问题.

关键词: Keller–Segel 系统; 信号依赖运动性; Fokker–Planck 型扩散; 辅助函数比较方法; 解的定性理论

MR(2010)分类号: 35K51, 35B40, 35B44, 92C17

Keller–Segel Systems with Signal-Dependent Fokker–Planck-Type Diffusion: Qualitative Theory of Solutions and the Auxiliary-Function Comparison Method

Jie Jiang

Wuhan Institute of Physics and Mathematics,
Innovation Academy for Precision Measurement Science and Technology,
Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China

E-mail: jiang@apm.ac.cn

*基金项目: 国家自然科学基金 (批准号: 12271505).

[†]电子邮箱: jiang@apm.ac.cn

Abstract. This survey reviews recent advances in Keller–Segel systems with signal-dependent Fokker–Planck-type diffusion. The qualitative theory is organized according to two principal features of the motility function, namely its asymptotic behavior and monotonicity. Within this framework, we summarize the main results for parabolic–elliptic and fully parabolic models concerning global existence, uniform-in-time boundedness, critical-mass phenomena, infinite-time unboundedness, and stabilization. Particular emphasis is placed on the auxiliary-function comparison method, which is built upon elliptic resolvent operators and key structural identities. We describe how the construction of suitable comparison quantities, the closure of a priori estimates, and regularity improvement are combined in this approach. The effects of damping in nonhomogeneous models and several open problems are also discussed.

Keywords. Keller–Segel system; signal-dependent motility; Fokker–Planck-type diffusion; auxiliary-function comparison method; qualitative theory of solutions.

1 引言：信号依赖运动性与 Keller–Segel 系统

Keller–Segel 型趋化系统是描述细胞、微生物等生物群体在化学信号作用下发生定向迁移与自组织聚集的核心数学模型. 在 Keller 和 Segel 1971 年的经典工作 [26] 中, 细胞扩散率和趋化灵敏度均允许依赖信号浓度. 用现代记号表示, 一个典型形式为

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(\gamma(v)\nabla u - u\chi(v)\nabla v), & x \in \Omega, t > 0, \\ \tau v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 u 和 v 分别表示细胞密度与信号浓度, $\gamma(v) > 0$ 表示信号调控的细胞运动性, $\chi(v)$ 表示趋化灵敏度. 在其随机游走推导中, 二者满足

$$\chi(v) = (\alpha - 1)\gamma'(v), \quad (1.2)$$

其中 $\alpha \geq 0$ 刻画有效感受器间距相对于随机游走步长的尺度. Keller 和 Segel 在完成一般推导之后, 特别讨论了极限情形 $\alpha = 0$ ¹. 此时个体仅通过单个感受器感知局部信号对其活动强度的无方向性调节, 这一机制在后续文献中通常称为局部感知.

当 $\alpha = 0$ 时, $\chi(v) = -\gamma'(v)$, 因而密度方程化为

$$u_t = \operatorname{div}(\gamma(v)\nabla u + u\gamma'(v)\nabla v) = \Delta(\gamma(v)u). \quad (1.3)$$

这就是本文关注的信号依赖 Fokker–Planck 型扩散结构.

¹Keller 和 Segel 在原文中特别说明, 这一情形是经 S. Corrsin 提醒后注意到的; 参见 [26, p. 228].

作为对照, 经典的 minimal Keller–Segel 系统可写为

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v), \\ \tau v_t = \Delta v - v + u. \end{cases} \quad (1.4)$$

其中常数扩散与趋化漂移彼此独立, 二者之间的竞争产生了二维临界质量、有限时间爆破等经典问题 [32, 4]. 相比之下, (1.3) 中的扩散与有效漂移并非彼此独立, 而是统一体现于 Fokker–Planck 通量

$$J_{\text{FP}} = -\nabla(\gamma(v)u)$$

之中. 当运动性系数预先给定时, 其零通量稳态满足 $\gamma(v)u_s = \text{constant}$, 而 Fick 型通量 $-\gamma(v)\nabla u$ 的零通量稳态满足 $\nabla u_s = 0$. 因此, Fokker–Planck 型扩散天然允许由空间异质性诱导的非均匀稳态 [3, 5].

尽管 (1.3) 的展开形式呈现出扩散–漂移结构, 两部分并不对应相互独立的生物过程. 整个通量统一来源于信号对个体随机运动强度的调节, 个体本身无需独立感知信号梯度. 其中 $\gamma(v)$ 决定随机运动强度, 而

$$-u\gamma'(v)\nabla v$$

给出宏观上的有效迁移偏向: $\gamma'(v) < 0$ 时表现为有效吸引, $\gamma'(v) > 0$ 时表现为有效排斥.

在合成生物学和微生物群体模型中, 高信号水平抑制运动能力可由 $\gamma' \leq 0$ 描述, 并可能诱导细胞聚集和周期性空间结构 [29, 10, 35]. 由此也产生两条基本分类轴: γ 在无穷远处的渐近大小决定高信号区域中的扩散强度, 而 γ' 的符号及其变化决定有效迁移偏向. 渐近退化、渐近无界增长及非单调运动性分别引出整体存在性、时间一致有界性、临界质量、无穷大时间无界性和长期动力学等问题.

退化迁移机制的近期综述可参见 [40]. 本文沿用“局部感知 Keller–Segel 系统”这一文献称谓, 同时强调其信号调制随机运动和非局部密度反馈 Fokker–Planck 扩散的结构特征. 本文按照运动性函数的渐近大小和有效迁移偏向梳理主要结果, 并以两个关键恒等式为基础提炼辅助函数比较框架. 弱解理论、数值离散、信号消耗、间接信号产生、流体耦合和随机粒子极限等方向不作系统综述.

本文安排如下. 第二节介绍模型结构, 主要困难和代表性分析路线; 第三节梳理齐次模型的主要结果; 第四节提炼辅助函数比较框架; 第五节概述从信号上界到密度高阶估计的正则性提升; 第六节讨论非齐次阻尼及修正比较方法; 第七节总结现有理论并提出开放问题.

2 模型框架与基本数学问题

2.1 方程形式与非局部反馈结构

为统一后文记号, 将本文讨论的模型写为

$$\begin{cases} u_t = \Delta(\gamma(v)u) - G(u), & x \in \Omega, t > 0, \\ \tau v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_\nu(\gamma(v)u) = \partial_\nu v = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界光滑区域, 系统配以适当的非负初值. 参数 $\tau \geq 0$ 表示信号响应时间, G 表示反应项. 下文称 $G \equiv 0$ 的情形为齐次模型, 称 $G \not\equiv 0$ 的情形为非齐次模型.

系统 (2.1) 的一个基本特征是, 密度方程中的运动性系数并非预先给定, 而是由信号变量反馈决定:

$$D(x, t) = \gamma(v(x, t)).$$

另一方面, 信号又由密度产生. 因而, 系统包含如下闭环反馈结构:

密度产生信号 $\longrightarrow$ 信号调节运动性 $\longrightarrow$ 运动性反过来控制密度演化.

参数 τ 是否为零决定了这一反馈是瞬时的还是动态的.

当 $\tau = 0$ 时, 信号变量由当前密度分布准静态地确定. 记

$$\mathcal{A} := I - \Delta$$

为带齐次 Neumann 边界条件的椭圆算子, 则

$$\mathcal{A}[v] = u, \quad v = \mathcal{A}^{-1}[u].$$

因此, 抛物-椭圆系统可以约化为关于密度的非局部方程

$$u_t = \Delta(\gamma(\mathcal{A}^{-1}[u])u) - G(u). \quad (2.2)$$

这体现了“密度产生信号-信号调节运动性”的瞬时空间非局部反馈. 在消去信号变量之后, 抛物-椭圆模型也可视为一类非局部密度反馈的 Fokker-Planck 扩散-反应方程.

当 $\tau > 0$ 时,

$$\tau v_t + \mathcal{A}[v] = u.$$

利用由 $-\mathcal{A}/\tau$ 生成的半群可将信号变量表示为

$$v(t) = e^{-t\mathcal{A}/\tau} v^{\text{in}} + \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{A}/\tau} u(s) \, ds.$$

此时 $v(t)$ 不仅取决于当前密度, 还依赖此前的密度演化, 因而形成兼具空间平滑和时间非局部性的动态反馈. 这与抛物-椭圆模型中的瞬时空间非局部关系具有本质区别.

因此, 抛物-椭圆模型和完全抛物模型分别对应瞬时空间非局部反馈与动态时空非局部反馈, 但二者共享同一基本结构: 密度经过椭圆预解算子或抛物演化算子产生信号, 信号再通过运动性函数 $\gamma(v)$ 调节密度的 Fokker-Planck 扩散. 由于这一扩散系数本身由解非局部地决定, 标准的一致抛物估计、能量方法和比较原理通常不能直接闭合, 这也构成后续分析的主要结构性困难.

2.2 主要数学困难

具有信号依赖 Fokker-Planck 型扩散的 Keller-Segel 系统主要面临以下几个方面的分析困难.

首先, 信号变量可能无界, 从而使密度方程失去一致抛物性. 对齐次模型, 由质量守恒及预解算子或热半群的正性通常可得

$$v(x, t) \geq v_* > 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \geq 0.$$

主要困难因而来自 v 可能趋于无穷: $\gamma(v)$ 既可能失去正下界, 也可能成为无界系数. 由于 v 由 u 产生, 信号上界与密度估计相互依赖, 建立 v 的点态上界通常是首要步骤.

其次, 一般 γ 下系统缺乏可直接利用的变分结构. 熵或 Lyapunov 泛函通常只在指数型, 幂函数型或满足特定微分关系时存在, 传统能量方法因而往往需要较强的结构条件.

再次, 将密度方程展开可得

$$u_t = \nabla \cdot (\gamma(v) \nabla u) + \nabla \cdot (u \gamma'(v) \nabla v) - G(u).$$

其中交叉扩散的符号随 γ' 变化, 一般难以用最大值原理或常规能量估计闭合; 同时还叠加了空间非局部性以及完全抛物情形中的历史依赖.

最后, 非线性反应项使齐次模型中由辅助函数方法揭示的内蕴比较结构不能直接沿用. 阻尼项直接提供的主要是整体积分意义下的耗散, 而这种耗散通常不足以立即给出点态估计. 如何修正辅助函数和比较关系, 并将积分耗散转化为 u 或 v 的点态控制, 是非齐次模型的主要困难.

2.3 已有研究方法的三条主要路线

围绕具有信号依赖 Fokker-Planck 型扩散的 Keller-Segel 系统, 现有研究可概括为三条具有代表性的路线: 快反应型多组分反应扩散逼近, 以密度估计为起点的直接能量方法, 以及辅助函数比较方法. 第一条路线主要用于模型导出和奇异极限分析, 后两条路线主要用于该类宏观方程本身的定性分析.

2.3.1 快反应型多组分反应扩散逼近

第一类方法从具有线性扩散和快速状态转换的多组分反应扩散系统出发, 通过奇异极限导出信号依赖 Fokker–Planck 型扩散方程 [17]. 典型逼近系统为

$$\begin{cases} \partial_t U_1 = d\Delta U_1 + \frac{1}{\varepsilon}(k(V)U_2 - h(V)U_1), \\ \partial_t U_2 = (d + \alpha)\Delta U_2 - \frac{1}{\varepsilon}(k(V)U_2 - h(V)U_1), \\ \tau\partial_t V = \Delta V - V + U_1 + U_2. \end{cases}$$

令 $U := U_1 + U_2$. 将前两个方程相加可得

$$\partial_t U = d\Delta U + \alpha\Delta U_2.$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 快反应平衡形式上给出

$$U_2 = \frac{h(V)}{k(V) + h(V)} U,$$

因而极限方程具有

$$\partial_t U = \Delta((d + H(V))U), \quad H(V) := \alpha \frac{h(V)}{k(V) + h(V)},$$

这样的信号依赖 Fokker–Planck 型扩散结构.

这一方法解释了信号依赖运动性的多状态迁移来源; 严格化的关键是建立关于 ε 一致的先验估计并识别极限通量. 类似思想也用于 “dweller–wanderer” 模型的快反应极限和斑图形成研究 [7, 8].

在上述情形中 $d \leq d + H(V) \leq d + \alpha$, 所得运动性有界且非退化; 渐近退化或无界增长的情形仍需其他分析工具.

2.3.2 直接能量估计与迭代方法

第二类方法将 Fokker–Planck 型扩散项展开为

$$\Delta(\gamma(v)u) = \nabla \cdot (\gamma(v)\nabla u) + \nabla \cdot (u\gamma'(v)\nabla v) - G(u),$$

从而把系统视为具有信号依赖扩散率和交叉扩散项的 Keller–Segel 型系统. 以 u^{p-1} 为测试函数, 形式上可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p + (p-1) \int_{\Omega} \gamma(v) u^{p-2} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} G(u) u^{p-1} \\ = -(p-1) \int_{\Omega} u^{p-1} \gamma'(v) \nabla u \cdot \nabla v. \end{aligned}$$

关键在于控制交叉项, 并对某个 $p > N/2$ 建立 u 的空间 $L^p(\Omega)$ 估计, 随后借助信号方程的正则性启动自举.

当 γ'/γ 可控或系统具有额外的熵与阻尼结构时, 可以结合插值, 加权能量, 对偶估计和 Moser–Alikakos 迭代闭合估计 [43, 33, 24, 1, 34, 25, 36, 37]. 然而, 对于一般运动性函数, 通量展开所产生的交叉项往往难以控制. 特别是当 $\gamma(v)$ 可能趋于零时, 获得 u 的高阶可积性通常需要 $\gamma(v)$ 具有一致正下界, 而后者又依赖于 v 的上界, 从而形成循环依赖.

2.3.3 辅助函数比较方法

第三类方法不展开 $\Delta(\gamma(v)u)$ 的通量结构, 而是借助 Neumann 椭圆预解算子, 辅助函数和比较原理优先控制信号变量 [11, 13, 12, 20, 15, 23, 16, 41, 21, 22].

记

$$\mathcal{A} := I - \Delta, \quad w := \mathcal{A}^{-1}[u],$$

其中 $\mathcal{A}$ 配以齐次 Neumann 边界条件. 对于齐次模型 $G \equiv 0$, 密度方程蕴含基本恒等式

$$w_t + \gamma(v)u = \mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u].$$

在抛物–椭圆情形中 $w = v$, 因而可利用预解算子的保正性, 椭圆比较原理和单调性技巧直接研究 v 的点态上界, 而不必先建立 u 的高阶可积性 [11, 20, 28, 21].

在完全抛物情形中, 上述恒等式仍然对密度势 w 成立, 但一般有 $w \neq v$. 因此, 需要引入进一步的辅助函数和分解关系, 将对 w 的控制传递给动态信号 v [13, 15, 23, 16, 41, 9, 22].

当 $G \neq 0$ 时, 上述恒等式中会出现额外的非局部项 $-\mathcal{A}^{-1}[G(u)]$, 从而破坏齐次模型中的直接比较关系. 这时需要构造新的辅助函数对该项进行吸收或补偿 [42, 30]. 相关恒等式及其具体闭合机制将在第 4 节与第 6.2 节结合相应模型介绍.

这一方法先建立信号上界, 再恢复密度方程的可控抛物结构, 从而在一定程度上避开通量展开产生的循环依赖.

2.3.4 三类方法的比较

上述三条路线处于不同的分析层次. 快反应逼近主要解释宏观扩散结构如何由多状态迁移机制产生, 而直接能量方法和辅助函数比较方法主要研究极限模型本身的定性性质. 后两者分别采取密度优先和信号优先的分析次序, 但并非彼此排斥. 辅助函数方法获得信号上界后, 通常仍需结合能量估计, 对偶方法, 迭代技术以及椭圆–抛物正则性, 才能进一步得到密度的一致有界性和高阶正则性.

3 运动性结构与齐次模型的主要数学结论

本节按运动性函数的渐近大小和单调性分类, 集中陈述齐次模型的整体存在, 一致有界性, 临界质量和无穷大时间爆破结果; 下一节讨论相应方法.

考虑齐次局部感知 Keller–Segel 系统

$$\begin{cases} u_t = \Delta(\gamma(v)u), & x \in \Omega, t > 0, \\ \tau v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_\nu(\gamma(v)u) = \partial_\nu v = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界光滑区域, $\tau \geq 0$, 且运动性函数满足

$$\gamma \in C^3((0, \infty)), \quad \gamma(s) > 0, \quad s > 0. \quad (3.2)$$

为统一表述, 下文不追求最弱的初值正则性. 当 $\tau = 0$ 时, 假设

$$u^{\text{in}} \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad u^{\text{in}} \geq 0, \quad u^{\text{in}} \not\equiv 0, \quad (3.3)$$

并令

$$v^{\text{in}} := \mathcal{A}^{-1}[u^{\text{in}}], \quad \mathcal{A} = I - \Delta, \quad (3.4)$$

其中 $\mathcal{A}$ 配以齐次 Neumann 边界条件. 当 $\tau > 0$ 时, 假设

$$(u^{\text{in}}, v^{\text{in}}) \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2), \quad u^{\text{in}} \geq 0, \quad u^{\text{in}} \not\equiv 0, \quad v^{\text{in}} > 0 \quad \text{在 } \overline{\Omega} \text{ 上}. \quad (3.5)$$

相应初值条件写为

$$u(0) = u^{\text{in}}, \quad v(0) = v^{\text{in}} \quad (\tau > 0).$$

记初始总质量及其空间平均为

$$\Lambda := \int_{\Omega} u^{\text{in}} dx, \quad m := \frac{\Lambda}{|\Omega|}. \quad (3.6)$$

在齐次模型中, 密度总质量守恒:

$$\int_{\Omega} u(t, x) dx = \Lambda, \quad t \geq 0. \quad (3.7)$$

3.1 运动性函数的两条分类轴

现有研究表明, 问题 (3.1) 的整体存在性, 一致有界性, 爆破及长期行为, 与 γ 在无穷远处的渐近大小和单调性密切相关. 记

$$\underline{\gamma}_{\infty} := \liminf_{s \rightarrow \infty} \gamma(s), \quad \overline{\gamma}_{\infty} := \limsup_{s \rightarrow \infty} \gamma(s). \quad (3.8)$$

根据渐近下包络是否为零以及渐近上包络是否有限, 可以将正运动性函数分为表 1 所列的四种彼此互斥的类型.

这一分类仅依据 γ 的渐近大小. 另一方面, 由

$$\Delta(\gamma(v)u) = \nabla \cdot (\gamma(v)\nabla u + u\gamma'(v)\nabla v)$$

表 1: 运动性函数的主要渐近类型及其典型影响

运动性类型	渐近条件	主要特征
有界非退化型	$0 < \underline{\gamma}_\infty \leq \bar{\gamma}_\infty < \infty$	运动性保持正且有界, 不发生渐近退化或无界增长
渐近退化而上有界型	$\underline{\gamma}_\infty = 0, \bar{\gamma}_\infty < \infty$	运动性可以变得任意小, 解行为通常对退化速度敏感
渐近无界而下非退化型	$\underline{\gamma}_\infty > 0, \bar{\gamma}_\infty = \infty$	运动性可以变得任意大, 增强扩散可能产生有界化效应
退化-无界混合型	$\underline{\gamma}_\infty = 0, \bar{\gamma}_\infty = \infty$	兼具渐近退化与无界增强, 并允许双向强振荡

可见, γ' 的符号决定迁移偏向: $\gamma' \leq 0$ 对应吸引, $\gamma' \geq 0$ 对应排斥, 而 γ' 变号则允许吸引与排斥共存. 因此, “渐近大小”和“迁移偏向”是两条相互独立的分类轴; 同一种渐近类型可以包含纯吸引, 纯排斥以及二者共存的情形.

抛物-椭圆模型和完全抛物模型对运动性尾部的允许范围存在显著差异. 当 $\tau = 0$ 时, 一般正运动性已经足以保证齐次模型的整体经典可解性. 相比之下, 当 $\tau > 0$ 时, 阈值 $1/\tau$ 在现有比较理论中起关键作用. 除有界非退化型外, 现有理论主要覆盖

$$\bar{\gamma}_\infty < \frac{1}{\tau} \quad \text{和} \quad \underline{\gamma}_\infty > \frac{1}{\tau}$$

两个区域. 这里的上下包络条件并不要求 γ 具有固定单调性.

因此, 表 1 并非后续定理的一一对应目录. 具体结论还取决于 τ , 空间维数, 单调性以及运动性的衰减或增长速度, 因而同一定理可能同时覆盖表中的多个渐近类型. 特别地, 当 $\tau = 0$ 时, 定理 3.4(ii) 同时覆盖渐近无界而下非退化型和退化-无界混合型; 对于 $\tau > 0$ 的退化-无界混合型, 一般的整体存在性与一致有界性理论尚未建立.

3.2 整体经典解的存在性

不同于 minimal Keller-Segel 系统中可能出现的有限时间爆破, 局部感知模型在抛物-椭圆情形下对一般正运动性均具有整体经典解; 在完全抛物情形下, 现有理论也已在广泛的尾部条件下排除了有限时间爆破.

对于抛物-椭圆模型, 综合 [20, 21] 中的结果, 可以得到如下普适的整体存在性结论.

定理 3.1 (抛物-椭圆模型的一般整体存在性). 设 $\tau = 0$, 且 γ 满足 (3.2). 则对任意满足 (3.3) 的初值, 问题 (3.1) 存在唯一的非负整体经典解.

上述定理由两类互补结果共同给出. 当

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) < \infty$$

时, 对任意正运动性函数均可建立整体经典解的存在性, 无需假设 γ 具有单调性 [20]. 当

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = \infty$$

时, 相应结论见 [21]. 因此, 在 $\tau = 0$ 时, 仅由 γ 的正性和基本正则性即可排除有限时间爆破, 无需对其单调性以及无穷远处的增长或衰减速度施加额外限制.

完全抛物模型中的情况更为复杂. 综合 [15, 41, 22] 中的结果, 目前已知的代表性充分条件可概括如下.

定理 3.2 (完全抛物模型的整体存在性). 设 $\tau > 0$, 且 γ 满足 (3.2). 若下列三组条件之一成立:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \limsup_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) < \frac{1}{\tau}; \\ \text{(ii)} \quad & 0 < \liminf_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) \leq \limsup_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) < \infty; \\ \text{(iii)} \quad & \liminf_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) > \frac{1}{\tau}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

则对任意满足 (3.5) 的初值, 问题 (3.1) 存在唯一的非负整体经典解.

注 3.3. 条件 (i) 的上述一般非单调形式见 [41]. 在运动性单调不增或满足其他附加结构条件时, 相关先行结果见 [13, 15, 16]; 含营养物质消耗的扩展模型见 [23].

条件 (ii) 见 [41], 条件 (iii) 见 [22].

上述三组条件包含所有正单调运动性, 也允许相当广泛的非单调情形.

需要强调的是, 整体存在并不蕴含时间一致有界. 条件 (ii) 和 (iii) 所对应的上述结果实际上还给出时间一致有界性, 而条件 (i) 在当前一般形式下仅保证整体经典解的存在. 对于某些快速衰减的运动性, 仍可能出现

$$\sup_{t \geq 0} (\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) = \infty.$$

由于有限时间爆破已经被排除, 这类无界行为只能表现为无穷大时间无界性.

3.3 任意空间维数下的一致有界性

首先汇总不涉及空间维数依赖阈值的一致有界性结果. 综合 [20, 41, 21, 22], 可以得到如下结论.

定理 3.4 (与空间维数无关的一致有界性). 设 $N \geq 1$, γ 满足 (3.2), 且初值满足前述相应条件. 若下列三组条件之一成立:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & 0 < \liminf_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) \leq \limsup_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) < \infty, \quad \tau \geq 0; \\ \text{(ii)} \quad & \limsup_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = \infty, \quad \tau = 0; \\ \text{(iii)} \quad & \liminf_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) > \frac{1}{\tau}, \quad \tau > 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

则问题 (3.1) 的整体经典解时间一致有界, 即

$$\sup_{t \geq 0} (\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) < \infty. \quad (3.11)$$

当 $\tau > 0$ 时, 条件 (i) 见 [41]; 其论证经相应简化亦可用于 $\tau = 0$. 它将此前二维凸区域及附加导数条件下的结论 [33] 推广到任意维数和一般光滑区域, 且不要求单调性.

条件 (ii) 见 [21]. 该条件只要求运动性在上极限意义下无界, 并不要求其单调或具有正的渐近下界. 因此, 它允许

$$\underline{\gamma}_\infty = 0, \quad \bar{\gamma}_\infty = \infty$$

这类退化与无界行为交替出现的运动性. 条件 (iii) 见 [22], 它给出了完全抛物模型中允许运动性渐近无界及其导数变号的一类充分条件.

这些条件覆盖所有正的单调非减运动性; 对这一排斥型分支还可得到向空间齐次稳态的稳定化.

定理 3.5 (单调非减运动性下的一致有界性与稳定化). 设 $N \geq 1$, $\tau \geq 0$, γ 满足 (3.2), 并且

$$\gamma'(s) \geq 0, \quad s > 0.$$

设初值满足前述相应条件, 并记

$$m := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u^{\text{in}}(x) \, dx.$$

则问题 (3.1) 的整体经典解时间一致有界, 并且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\|u(t) - m\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t) - m\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}) = 0. \quad (3.12)$$

抛物-椭圆与完全抛物情形分别见 [21, 22]. 部分单调递减运动性也有类似稳定化结论, 见下文幂函数情形.

3.4 退化运动性下与维数相关的有界性条件

当

$$\underline{\gamma}_\infty = 0$$

时, 密度方程可能在大信号区域失去一致抛物性. 此时, 一致有界性不再仅由运动性是否退化决定, 还依赖其衰减速度及空间维数. 当 $N = 1$ 时, 质量守恒结合一维椭圆或抛物正则化可直接给出 v 的时间一致 L^∞ 估计, 从而 $\gamma(v)$ 沿解轨道保持一致非退化; 再由标准抛物正则化与自举即可得到 u 的一致有界性. 因此, 下文仅讨论 $N \geq 2$ 的情形.

3.4.1 二维情形

在二维情形中, 亚指数下界条件可保证任意质量解的一致有界性 [12, 41, 21].

定理 3.6 (二维亚指数下界条件下的任意质量有界性). 设 $N = 2$, 并假设

$$\underline{\gamma}_\infty = 0.$$

当 $\tau > 0$ 时, 进一步假设

$$\overline{\gamma}_\infty < \frac{1}{\tau}.$$

若对任意 $\chi > 0$, 均有

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} e^{\chi s} \gamma(s) > 0, \quad (3.13)$$

则对任意满足前述条件的初值, 问题 (3.1) 的整体经典解均时间一致有界.

条件 (3.13) 表明运动性可能出现的低谷不低于任意负指数尺度. 典型例子包括

$$\gamma(s) = s^{-k_1} \log^{-k_2}(1+s), \quad k_1 > 0, \quad k_2 \geq 0,$$

以及

$$\gamma(s) = e^{-s^q}, \quad 0 < q < 1.$$

这些运动性在二维中均给出任意质量的一致有界性.

3.4.2 高维情形

在高维空间中, 一致有界性通常需要对运动性的代数衰减速度作出限制. 以幂函数

$$\gamma(s) = s^{-k}, \quad k > 0,$$

为例, 早期工作在附加小性条件下得到有界性 [43], 随后在抛物-椭圆情形中将无条件有界范围推进到

$$0 < k < \frac{2}{N-2}$$

[1].

此后, 抛物-椭圆模型中允许的代数衰减范围被进一步扩大到

$$0 < k < \frac{N}{N-2}.$$

与此同时, 幂函数条件被推广为双边代数控制条件: 允许存在 $0 \leq l \leq k$ 使

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} s^k \gamma(s) > 0, \quad \limsup_{s \rightarrow \infty} s^l \gamma(s) < \infty,$$

并要求

$$k < \frac{N}{N-2}, \quad k-l < \frac{2}{N-2}.$$

该结果最初在 $\tau = 0$ 且 γ 单调不增的条件下获得 [20]. 对于完全抛物模型, 幂函数型运动性情形随后也得到了相同的临界阈值 [23, 16]. 此后, 完全抛物模型在双边代数控制条件下的相关结论被推广到一般非单调运动性函数 [41]; 尽管该文主要研究 $\tau > 0$ 的情形, 其论证经相应简化亦可用于 $\tau = 0$.

定理 3.7 (高维代数衰减条件下的任意质量有界性). 设 $N \geq 3$, 并假设

$$\underline{\gamma}_\infty = 0.$$

进一步假设 $\tau = 0$, 或者 $\tau > 0$ 且

$$\bar{\gamma}_\infty < \frac{1}{\tau}.$$

若存在 $0 \leq l \leq k$ 满足

$$0 < k < \frac{N}{N-2}, \quad k-l < \frac{2}{N-2}, \quad (3.14)$$

并且

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} s^k \gamma(s) > 0, \quad \limsup_{s \rightarrow \infty} s^l \gamma(s) < \infty, \quad (3.15)$$

则对任意满足前述条件的初值, 问题 (3.1) 的整体经典解均时间一致有界.

条件 (3.15) 允许 γ 在 s^{-k} 与 s^{-l} 两个代数阶之间非单调波动, 而

$$k-l < \frac{2}{N-2}$$

限制两者的差距.

对于最典型的幂函数运动性, 可以同时得到一致有界性和长期稳定性 [1, 19, 9, 23].

推论 3.8 (幂函数运动性下的有界性与稳定性). 设 $N \geq 3$, 且

$$\gamma(s) = s^{-k}, \quad k > 0.$$

若

$$k < \frac{N}{N-2}, \quad (3.16)$$

则抛物-椭圆模型和完全抛物模型的整体经典解对任意初值均时间一致有界.

进一步, 若

$$0 < k \leq 1, \quad (3.17)$$

则解以指数速率趋于由守恒质量确定的空间齐次稳态 (m, m) .

更一般地, 对单调递减运动性, 若

$$\gamma(s) + s\gamma'(s) \geq 0, \quad s > 0, \quad (3.18)$$

则系统具有 Lyapunov 泛函, 且一致有界解指数收敛到 (m, m) [9, 23].

对于 $\gamma(s) = s^{-k}$, 有

$$\gamma(s) + s\gamma'(s) = (1 - k)s^{-k}.$$

故 $0 < k \leq 1$ 时得到上述稳定性. 这里有两个不同层次的指数范围:

$$0 < k < \frac{N}{N-2}$$

保证任意质量下的时间一致有界性, 而

$$0 < k \leq 1$$

还保证解向空间齐次稳态指数收敛. 指数

$$k_c = \frac{N}{N-2}$$

是目前高维任意质量有界性理论达到的阈值, 其临界性仍未解决.

3.5 指数退化下的临界质量与无穷大时间爆破

二维亚指数下界条件保证任意质量有界, 而负指数运动性开始产生质量依赖的聚集现象. 因此, 指数衰减是现有理论中由任意质量有界转向质量依赖无界行为的候选临界尺度.

考虑负指数型运动性

$$\gamma(s) = e^{-\chi s}, \quad \chi > 0, \quad (3.19)$$

并记守恒质量为

$$\Lambda = \int_{\Omega} u^{\text{in}} dx.$$

此时, 局部感知模型与具有相同信号方程的 minimal Keller–Segel 模型

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - \chi u \nabla v), \\ \tau v_t = \Delta v - v + u \end{cases}$$

具有相同的正稳态. 事实上, 任一正稳态 (u_s, v_s) 均满足

$$\begin{cases} -\Delta v_s + v_s = \frac{\Lambda e^{\chi v_s}}{\int_{\Omega} e^{\chi v_s} dx}, & x \in \Omega, \\ u_s = \frac{\Lambda e^{\chi v_s}}{\int_{\Omega} e^{\chi v_s} dx}, & x \in \Omega, \\ \partial_{\nu} v_s = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.20)$$

局部感知模型与 minimal Keller–Segel 模型共享 Lyapunov 泛函

$$\mathcal{F}(u, v) := \int_{\Omega} \left[u \log u - \chi uv + \frac{\chi}{2} |\nabla v|^2 + \frac{\chi}{2} v^2 \right] dx. \quad (3.21)$$

但耗散机制不同. minimal Keller–Segel 模型满足

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u, v) + \int_{\Omega} u |\nabla(\log u - \chi v)|^2 dx + \chi\tau \int_{\Omega} |v_t|^2 dx = 0,$$

而局部感知模型满足

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u, v) + \int_{\Omega} e^{-\chi v} u |\nabla(\log u - \chi v)|^2 dx + \chi\tau \int_{\Omega} |v_t|^2 dx = 0.$$

退化权重 $e^{-\chi v}$ 减弱了高信号区域中的耗散. 因而两类模型虽有相同稳态和 Lyapunov 泛函, 聚集时间尺度却不同: minimal Keller–Segel 模型可有限时间爆破, 而局部感知模型的无界行为只能发生在无穷大时间.

3.5.1 二维临界质量

定理 3.9 (二维指数运动性下的质量阈值与无穷大时间爆破). 设 $N = 2$, 且运动性由 (3.19) 给出. 考虑抛物–椭圆模型 $\tau = 0$ 以及归一化完全抛物模型 $\tau = 1$. 则相应经典解对任意满足前述条件的正则初值均整体存在, 并具有如下性质.

1. 定义

$$\Lambda_c := \begin{cases} \frac{8\pi}{\chi}, & \Omega = B_R(0) \text{ 且相应初值径向对称,} \\ \frac{4\pi}{\chi}, & \text{一般情形.} \end{cases} \quad (3.22)$$

若 $\Lambda < \Lambda_c$, 则整体经典解时间一致有界. 此外, 存在稳态 (u_s, v_s) , 使得

$$(u(t), v(t)) \longrightarrow (u_s, v_s) \quad \text{in } C^2(\bar{\Omega}) \times C^2(\bar{\Omega})$$

当 $t \rightarrow \infty$.

2. 若 $\Omega = B_R(0)$, 则对任意

$$\Lambda \in \left(\frac{8\pi}{\chi}, \infty \right) \setminus \frac{4\pi}{\chi} \mathbb{N}^*, \quad (3.23)$$

抛物–椭圆模型和完全抛物模型均存在质量为 Λ 的径向正则初值, 使相应整体经典解在无穷大时间无界, 即

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) = \infty. \quad (3.24)$$

3. 对于归一化完全抛物模型, 在任意二维有界光滑区域上, 对每个

$$\Lambda \in \left(\frac{4\pi}{\chi}, \infty \right) \setminus \frac{4\pi}{\chi} \mathbb{N}^*, \quad (3.25)$$

均存在一组质量为 Λ 的非负光滑初值, 无需假设区域或初值具有径向对称性, 使相应整体经典解满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) = \infty. \quad (3.26)$$

圆盘径向构造在球心集中, 阈值为 $8\pi/\chi$; 一般非径向构造允许边界集中, 阈值降为 $4\pi/\chi$, 相关超临界质量的初值构造可追溯到 [18]. 围绕指数运动性下的二维临界质量现象, [25] 与 [11] 同期开展了研究. 前者在一般二维区域上证明了质量低于 $4\pi/\chi$ 时解的时间一致有界性, 并在超临界质量下构造了使解可能无界的初值; 后者结合抛物-椭圆模型的整体经典解存在性, 将相应的无界行为确定为无穷大时间爆破. 完全抛物模型中的相应结果随后见 [13, 14]. 弱解框架下的有限时间正则性也给出了与这一图景相容的结论 [6].

3.5.2 高维任意质量无穷大时间爆破

在三维及更高维空间中, 指数运动性产生的聚集现象更强. 即使总质量任意小, 也可以选择适当初值产生无穷大时间无界解 [15].

定理 3.10 (高维任意质量下无穷大时间无界解的存在). 设 $N \geq 3$, $\tau = 1$, $\Omega = B_R(0)$, 且

$$\gamma(s) = e^{-\chi s}, \quad \chi > 0.$$

则对任意给定质量 $M > 0$, 均存在一组径向对称的正则初值 $(u^{\text{in}}, v^{\text{in}})$, 满足

$$\int_{\Omega} u^{\text{in}} dx = M,$$

使相应整体经典解满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) = \infty. \quad (3.27)$$

上述结果的主要空白集中留至结语讨论. 下一节从预解算子和关键恒等式出发, 说明辅助函数比较方法在不同运动性区域中的实现.

4 辅助函数比较方法的统一框架与具体实现

本节整理齐次局部感知模型中辅助函数比较方法的共同结构. 其基本特点是保留 $\Delta(\gamma(v)u)$ 的整体形式, 借助正的椭圆预解算子和适当的抛物辅助函数, 先获得信号变量的点态控制, 再恢复密度方程的一致抛物性. 方法可概括为

$$\boxed{\text{结构提取}} \implies \boxed{\text{比较量构造}} \implies \boxed{\text{估计闭合}} \implies \boxed{\text{正则性提升}}. \quad (4.1)$$

下文先给出这一框架的骨架, 再讨论其在不同运动性区域中的具体实现.

4.1 问题设定与预备估计

沿用第 3 节的齐次模型和初值假设. 标准局部适定性理论给出唯一非负局部经典解 (u, v) , 其最大存在区间记为 $[0, T_{\max})$. 相应延拓准则为若 $T_{\max} < \infty$, 则

$$\limsup_{t \uparrow T_{\max}} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty. \quad (4.2)$$

局部解质量守恒, 且存在与时间无关的 $v_* > 0$ 使

$$v(x, t) \geq v_*. \quad (4.3)$$

因此只需先控制 v , 再由正则性提升获得 u 的有限时间上界.

4.2 统一框架: 四个方法模块

4.2.1 模块一: 辅助函数与两个关键恒等式

记

$$\mathcal{A} := I - \Delta$$

为带齐次 Neumann 边界条件的椭圆算子, 并定义第一辅助函数

$$w := \mathcal{A}^{-1}[u]. \quad (4.4)$$

记 $w^{\text{in}} := \mathcal{A}^{-1}[u^{\text{in}}]$. 由于 $\Delta = I - \mathcal{A}$, 对密度方程作用 $\mathcal{A}^{-1}$, 可得

$$w_t = \mathcal{A}^{-1}\Delta[\gamma(v)u] = \mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u] - \gamma(v)u.$$

由此得到第一关键恒等式

$$w_t + \gamma(v)u = \mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u]. \quad (4.5)$$

它将二阶扩散结构转化为零阶乘积项与保正非局部项之间的关系, 是两类模型的共同出发点.

当 $\tau = 0$ 时, 信号方程为

$$\mathcal{A}[v] = u,$$

从而由 (4.4) 直接得到

$$v = w.$$

当 $\tau > 0$ 时, v 与 w 不再相同. 记

$$\mathcal{L} := \tau \partial_t + \mathcal{A},$$

并引入第二辅助函数 Ψ , 使其满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\Psi] = \gamma(v)u, & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_\nu \Psi = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ \Psi(0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.6)$$

由抛物比较原理可知

$$\Psi \geq 0.$$

进一步定义

$$\psi := \mathcal{A}^{-1}[\Psi]. \quad (4.7)$$

于是 $\psi \geq 0$, 且 $\psi(0) = 0$. 由于 $\mathcal{A}$ 与时间微分可交换, 由 (4.6) 得

$$\mathcal{L}[\psi] = \mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u]. \quad (4.8)$$

由 $\mathcal{A}[w] = \mathcal{L}[v] = u$ 及上述方程得到

$$\mathcal{L}[w + \tau\Psi - v - \tau\psi] = 0. \quad (4.9)$$

令 η 为齐次初值修正项:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\eta] = 0, & x \in \Omega, \ t > 0, \\ \partial_\nu \eta = 0, & x \in \partial\Omega, \ t > 0, \\ \eta(0) = w^{\text{in}} - v^{\text{in}}, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.10)$$

由线性初边值问题的唯一性得到第二关键恒等式

$$w + \tau\Psi = v + \tau\psi + \eta. \quad (4.11)$$

此外, 由最大值原理,

$$\|\eta(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|w^{\text{in}} - v^{\text{in}}\|_{L^\infty(\Omega)} =: C_{\text{in}}, \quad t \geq 0.$$

因而 $v + \tau\psi$ 与 $w + \tau\Psi$ 之差一致有界.

完全抛物情形中的核心由此转化为建立 Ψ 与 v 的点态比较.

4.2.2 模块二: 构造可比较量

可比较量的选取取决于 γ 的单调性和尾部行为. 最常用的是原函数

$$\Gamma(s) := \int_{v_*}^s \gamma(\sigma) d\sigma, \quad s \geq v_*. \quad (4.12)$$

除非另行加下标说明, 后文中的 Γ 始终指 (4.12) 所定义的原函数. 由链式法则,

$$\mathcal{A}[\Gamma(v)] = \gamma(v)u - \gamma'(v)|\nabla v|^2 + \Gamma(v) - v\gamma(v), \quad \tau = 0, \quad (4.13)$$

而当 $\tau > 0$ 时,

$$\mathcal{L}[\Gamma(v)] = \gamma(v)u - \gamma'(v)|\nabla v|^2 + \Gamma(v) - v\gamma(v). \quad (4.14)$$

抛物-椭圆情形通常比较 $\mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u]$ 与 $\Gamma(v)$, 或构造标量上下解; 完全抛物情形则比较 Ψ 与 $\Gamma(v)$. 当 γ' 变号时, 可用单调包络, 尾部截断或组合量恢复序结构.

4.2.3 模块三: 完成估计闭合

在获得点态比较关系后, 现有证明主要通过以下四类机制完成闭合:

1. 利用标量微分不等式, 上下解或不变区间, 直接控制 v 的最大模;
2. 若 $\Gamma(s) = o(s)$, 利用 $\Gamma(s) \leq \varepsilon s + C_\varepsilon$ 完成次线性吸收;
3. 结合能量或积分估计, 通过幂次迭代, 指数可积性或有限次预解算子迭代, 将低阶控制提升为点态上界;
4. 当 γ' 变号而点态比较失去确定方向时, 构造耦合未知量与辅助量的新型泛函, 通过建立闭合的微分不等式获得 Ψ 的时间一致控制.

它们将比较关系转化为闭合先验估计.

4.2.4 模块四: 由信号控制到密度有界性

利用 $u = \mathcal{A}[w] = w - \Delta w$, 第一关键恒等式可改写为

$$w_t - \gamma(v)\Delta w + \gamma(v)w = \mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u]. \quad (4.15)$$

一旦 v 有界, $\gamma(v)$ 便具有严格正的上下界. 进一步获得 w, v 的 Hölder 正则性后, 可应用非自治抛物发展算子理论与能量估计控制 u . 这一过程可概括为

$$\boxed{v \text{ 有界} \implies \gamma(v) \text{ 一致非退化} \implies w, v \text{ 的 Hölder 正则性} \implies u \in L^\infty.} \quad (4.16)$$

下文讨论前三个模块, 正则性提升留待下一节.

4.3 抛物-椭圆模型中的具体实现

当 $\tau = 0$ 时, 有 $v = w$, 因而第一关键恒等式化为

$$v_t + \gamma(v)u = \mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u]. \quad (4.17)$$

该式保留了左端 $\gamma(v)u$ 的正性, 并将系统的主要困难集中于右端的非局部项. 因此, 抛物-椭圆情形中的关键是根据 γ 的单调性和尾部行为, 对 $\mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u]$ 建立适当的点态或积分估计.

4.3.1 单调递减运动性: 有限时间控制与慢衰减闭合

设

$$\gamma'(s) \leq 0, \quad s > 0. \quad (4.18)$$

由 $v \geq v_*$, 有

$$0 < \gamma(v) \leq \gamma(v_*) =: \gamma^*.$$

利用 $\mathcal{A}^{-1}$ 的保序性和 $\mathcal{A}^{-1}[u] = v$, 得到

$$0 \leq \mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u] \leq \gamma^* v. \quad (4.19)$$

结合 (4.17) 以及 $\gamma(v)u \geq 0$, 可得

$$v_t \leq \gamma^* v,$$

从而

$$v(t, x) \leq e^{\gamma^* t} \|v^{\text{in}}\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad 0 < t < T_{\max}. \quad (4.20)$$

因此, $\gamma(v)$ 在任意有限时间区间内保持非退化, 从而可结合延拓准则排除有限时间奇性.

为了获得时间一致控制, 需要进一步利用原函数比较. 注意到第一关键恒等式可以写为

$$v_t - \gamma(v)\Delta v + \gamma(v)v = \mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u]. \quad (4.21)$$

由 (4.13) 以及 $\gamma' \leq 0$, 可得

$$\mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u] \leq \Gamma(v) + C_*, \quad C_* := v_* \gamma(v_*). \quad (4.22)$$

该估计把非局部源项的增长归结为原函数 Γ 的增长, 从而将运动性函数在无穷远处的衰减性质直接传递到后续的积分估计中.

以

$$\gamma(s) = s^{-k}, \quad k > 0,$$

为例, 相应原函数满足

$$\Gamma_k(s) := \int_{v_*}^s \sigma^{-k} d\sigma = \begin{cases} O(s^{1-k}), & 0 < k < 1, \\ O(\log s), & k = 1, \\ O(1), & k > 1. \end{cases} \quad (4.23)$$

以 v^{p-1} 测试由 (4.21) 与 (4.22) 导出的微分不等式, 并结合质量守恒与 Gagliardo–Nirenberg 插值, 可在相应的衰减指数范围内依次获得任意有限阶的 L^p 估计. 随后通过 Moser–Alikakos 迭代得到

$$\sup_{t \geq 0} \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty. \quad (4.24)$$

在二维情形中, 还可以利用 $v = \mathcal{A}^{-1}[u]$, 质量守恒以及 Brezis–Merle 型指数可积性不等式, 处理满足

$$\log \frac{1}{\gamma(s)} = o(s), \quad s \rightarrow \infty,$$

的一般亚指数退化运动性. 因而, 原函数比较不仅提供非局部项的上界, 还保留了运动性尾部衰减与后续估计条件之间的定量联系.

4.3.2 单调递增运动性: 标量上解与不变区间

设

$$\gamma'(s) \geq 0, \quad s > 0. \quad (4.25)$$

此时原函数比较不再是主要工具. 由椭圆预解算子的保序性,

$$\mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u] \leq \gamma(\|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)})v. \quad (4.26)$$

据此构造方程 (4.21) 的标量上解 $\bar{V}$, 使

$$\begin{cases} \bar{V}' + \bar{V}\gamma(\bar{V}) = \gamma(\|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)})\bar{V}, \\ \bar{V}(0) = \|v^{\text{in}}\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{cases} \quad (4.27)$$

由抛物比较原理有 $v \leq \bar{V}$. 再利用 γ 的单调递增性, 可知 $\bar{V}$ 不随时间增加. 类似地构造标量下解, 即可得到

$$\min_{\bar{\Omega}} v^{\text{in}} \leq v(t, x) \leq \max_{\bar{\Omega}} v^{\text{in}}, \quad (t, x) \in [0, T_{\max}) \times \bar{\Omega}. \quad (4.28)$$

因此, 这一情形中的估计闭合并不依赖对运动性增长的补偿, 而是利用标量上、下解将信号变量限制在由初值确定的不变区间内.

4.3.3 渐近无界非单调运动性: 增减分解与不变阈值

进一步考虑

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = \infty, \quad (4.29)$$

但不要求 γ' 保持固定符号. 选取 $s_* \geq \|v^{\text{in}}\|_{L^\infty(\Omega)}$, 使

$$\gamma(s_*) = \max_{s \in [v_*, s_*]} \gamma(s). \quad (4.30)$$

在阈值 s_* 以上, 将 γ 分解为

$$\gamma(s) = \gamma(s_*) + \gamma_i(s) + \gamma_d(s), \quad s \geq s_*, \quad (4.31)$$

其中 $\gamma_i \geq 0$ 单调非减, $\gamma_d \leq 0$ 单调非增. 取上述分解满足 $\gamma_i(s_*) = \gamma_d(s_*) = 0$, 并将 γ_i, γ_d 零延拓至 $[v_*, s_*]$. 对下降部分定义

$$\Gamma_d(s) := \int_{s_*}^s \gamma_d(\sigma) d\sigma, \quad s \geq s_*, \quad (4.32)$$

并将 Γ_d 零延拓至 $[v_*, s_*]$. 该分解将上升部分通过空间最大模控制, 同时把下降部分转化为有利的椭圆项. 由此可建立

$$u\gamma(v) \leq u[\gamma(s_*) + \gamma_i(\|v\|_{L^\infty})] + \mathcal{A}[\Gamma_d(v)]. \quad (4.33)$$

对 (4.33) 作用 $\mathcal{A}^{-1}$, 再代入 (4.21), 即可构造以 s_* 为初值的标量上解. 利用 γ_i 的单调性以及 Γ_d 所产生的补偿项, 可证明阈值 s_* 对标量比较方程是不变的, 从而得到

$$\|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq s_*, \quad 0 < t < T_{\max}. \quad (4.34)$$

这一增减分解保留了运动性函数上升部分与下降部分各自的有利结构, 并由此获得以 s_* 为上界的时间一致控制.

4.4 完全抛物模型中的具体实现

完全抛物情形以下均以第一关键恒等式 (4.5) 和第二关键恒等式 (4.11) 为基础, 不再重复写出. 相较于抛物-椭圆模型, 新增的核心任务是建立 Ψ 与 v 的直接比较, 再据此控制 w, ψ 与 v .

4.4.1 单调递减运动性: 原函数比较与吸收闭合

设 $\gamma' \leq 0$. 由 $v \geq v_*$, 有 $\gamma(v) \leq \gamma^* := \gamma(v_*)$. 利用 $\mathcal{A}^{-1}$ 的保序性,

$$\mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u] \leq \gamma^* w.$$

结合 (4.5) 以及 $\gamma(v)u \geq 0$, 可得

$$w(t, x) \leq e^{\gamma^* t} w^{\text{in}}(x), \quad 0 < t < T_{\max}. \quad (4.35)$$

取前置定义的原函数 Γ . 由 (4.14), $\gamma' \leq 0$ 以及

$$\Gamma(s) \geq (s - v_*)\gamma(s),$$

可得

$$\mathcal{L}[\Gamma(v) + C_*] \geq \gamma(v)u = \mathcal{L}[\Psi], \quad C_* := v_*\gamma(v_*). \quad (4.36)$$

又由于

$$\Psi(0) = 0 \leq \Gamma(v^{\text{in}}) + C_*,$$

抛物比较原理给出

$$\Psi \leq \Gamma(v) + C_*. \quad (4.37)$$

若

$$\bar{\gamma}_\infty := \limsup_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) < \frac{1}{\tau},$$

则由 Γ 的定义,

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(s)}{s} \leq \bar{\gamma}_\infty.$$

因此, 可选取

$$\bar{\gamma}_\infty < \varepsilon < \frac{1}{\tau},$$

使

$$\Gamma(s) \leq \varepsilon s + C_\varepsilon, \quad s \geq v_*.$$

结合 (4.37), 得到

$$\Psi \leq \varepsilon v + C_\varepsilon. \quad (4.38)$$

另一方面, 由第二关键恒等式及 $\psi \geq 0$,

$$v \leq w + \tau\Psi + C_{\text{in}}. \quad (4.39)$$

代入 (4.38), 得到

$$v \leq \frac{w + C}{1 - \tau\varepsilon}. \quad (4.40)$$

结合 (4.35), 可知 v 在任意有限时间区间内有界. 因此, $\gamma(v)$ 不会在有限时间内退化, 再结合后续的正则性提升与延拓准则, 即可获得整体经典解.

对于代数衰减运动性 $\gamma(s) = s^{-k}$, $k > 0$, 由 (4.40) 以及 w 的时间一致正下界, 可将其中的常数项吸收到乘法常数中, 从而得到

$$v \leq C_0 w. \quad (4.41)$$

另一方面, 由第二关键恒等式及 $\Psi \geq 0$, 有

$$w \leq v + \tau\psi + C_{\text{in}}. \quad (4.42)$$

令

$$\tilde{w} := C_0 w.$$

由 Γ_k 的单调性, $\mathcal{A}^{-1}$ 的保序性, (4.37) 以及 $\psi = \mathcal{A}^{-1}[\Psi]$, 有

$$\psi \leq \mathcal{A}^{-1}[\Gamma_k(\tilde{w})] + C. \quad (4.43)$$

注意到 $\mathcal{A}[\tilde{w}] = C_0 u \geq 0$. 由 $\gamma' \leq 0$ 及链式法则,

$$\mathcal{A}[\Gamma_k(\tilde{w})] \geq \Gamma_k(\tilde{w}) - \tilde{w}\gamma(\tilde{w}).$$

对于 $\gamma(s) = s^{-k}$, 存在 $c > 0$ 和 $C > 0$ 使

$$\Gamma_k(s) - s\gamma(s) \geq c\Gamma_k(s) - C, \quad s \geq v_*.$$

因此,

$$\mathcal{A}[\Gamma_k(\tilde{w})] \geq c\Gamma_k(\tilde{w}) - C.$$

作用 $\mathcal{A}^{-1}$ 后得到

$$\mathcal{A}^{-1}[\Gamma_k(\tilde{w})] \leq c^{-1}\Gamma_k(\tilde{w}) + C.$$

结合 (4.43),

$$\psi \leq C\Gamma_k(\tilde{w}) + C.$$

由于

$$\Gamma_k(s) = o(s), \quad s \rightarrow \infty,$$

故对任意 $\delta > 0$, 存在 $C_\delta > 0$ 使

$$\psi \leq \delta w + C_\delta. \quad (4.44)$$

这表明 ψ 对 w 仅呈严格次线性依赖. 将其代入 (4.42), 并取 $\tau\delta < 1$, 得到

$$w \leq C(v + 1). \quad (4.45)$$

结合 v 的时间一致正下界, 可将常数项吸收到乘法常数中, 从而

$$c_0 w(t, x) \leq v(t, x) \leq C_0 w(t, x). \quad (4.46)$$

于是

$$C_0^{-k} w^{-k} \leq \gamma(v) \leq c_0^{-k} w^{-k}. \quad (4.47)$$

因此, 关于 v 的退化运动性可等价转化为关于 w 的权函数估计. 这一双向比较将完全抛物模型的后续估计归约为抛物-椭圆情形中的同类加权拟线性问题. 在相应的次临界指数范围内, 能量估计和 Moser-Alikakos 迭代可按前述过程完成, 此处不再赘述.

4.4.2 单调递增运动性: 反向原函数比较与预解算子迭代

设 $\gamma' \geq 0$, 并主要考虑

$$\gamma(s) \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty.$$

由 (4.14) 以及 $0 \leq \Gamma(s) \leq s\gamma(s)$, 有

$$\mathcal{L}[\Gamma(v)] \leq \gamma(v)u = \mathcal{L}[\Psi]. \quad (4.48)$$

抛物比较原理给出

$$\Gamma(v) \leq \Psi + C. \quad (4.49)$$

由于

$$\frac{\Gamma(s)}{s} \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty,$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$v \leq \varepsilon \Psi + C_\varepsilon. \quad (4.50)$$

将其代入第二关键恒等式, 并取 $\varepsilon \in (0, \tau)$, 可得

$$\Psi \leq C\mathcal{A}^{-1}[\Psi] + C. \quad (4.51)$$

上式经过有限次预解算子迭代, 再结合椭圆正则性和 Sobolev 嵌入, 给出

$$\|\Psi(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|\Psi(t)\|_{L^1(\Omega)} + C. \quad (4.52)$$

由 (4.50) 还可推出

$$\|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|\Psi(t)\|_{L^1(\Omega)} + C. \quad (4.53)$$

因此, 要获得 Ψ 与 v 的点态控制, 只需进一步估计 $\|\Psi(t)\|_{L^1(\Omega)}$.

记

$$m := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u^{\text{in}}(x) \, dx.$$

对平均值为零的函数 z , 以 $\mathcal{K}[z]$ 表示 Neumann 问题

$$-\Delta \mathcal{K}[z] = z, \quad \partial_\nu \mathcal{K}[z] = 0, \quad \int_{\Omega} \mathcal{K}[z] \, dx = 0$$

的解. 引入能量泛函

$$\mathcal{I}(u, v) := \frac{1}{2} \|\nabla \mathcal{K}[u - m]\|_{L^2(\Omega)}^2 + m\tau \int_{\Omega} \Gamma(v) \, dx - m\gamma(m)\tau \int_{\Omega} v \, dx. \quad (4.54)$$

直接计算得到能量耗散恒等式

$$\frac{d}{dt} \mathcal{I}(u, v) + \mathcal{D}(u, v) = 0, \quad (4.55)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(u, v) &:= m \int_{\Omega} \gamma'(v) |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\Omega} \gamma(v) (u - m)^2 \, dx \\ &\quad + m \int_{\Omega} (v - m) (\gamma(v) - \gamma(m)) \, dx \geq 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

由于

$$s \mapsto \Gamma(s) - \gamma(m)s$$

从下方有界, 能量泛函 $\mathcal{I}$ 亦从下方有界. 因而, 由 (4.55) 可得

$$\int_0^{T_{\max}} \mathcal{D}(u(t), v(t)) \, dt < \infty.$$

另一方面, 对 Ψ 方程积分有

$$\tau \frac{d}{dt} \|\Psi(t)\|_{L^1(\Omega)} + \|\Psi(t)\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u \gamma(v) \, dx. \quad (4.57)$$

利用 γ 的单调性, 对区域 $\{v < 2m\}$ 和 $\{v \geq 2m\}$ 分别估计, 再结合 Young 不等式, 可得

$$\int_{\Omega} u \gamma(v) \, dx \leq C(1 + \mathcal{D}(u, v)). \quad (4.58)$$

结合 (4.58) 和 (4.57), 并应用指数积分因子, 得到

$$\sup_{0 \leq t < T_{\max}} \|\Psi(t)\|_{L^1(\Omega)} < \infty. \quad (4.59)$$

于是, 由 (4.52) 和 (4.53), 可依次获得 Ψ 与 v 在 $[0, T_{\max})$ 上的时间一致上界. 再结合正则性提升与延拓准则, 可得 $T_{\max} = \infty$, 从而上述估计在所有 $t \geq 0$ 上成立.

4.4.3 尾部下界高于 $1/\tau$ 的非单调运动性：下包络与耦合泛函

下面不要求 γ' 具有固定符号，并假设运动性在尾部一致非退化且超过比较阈值 $1/\tau$ ：

$$\underline{\gamma}_\infty := \liminf_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) > \frac{1}{\tau}. \quad (4.60)$$

固定 $\varepsilon \in (0, 1)$. 可构造光滑非减函数 γ_ε 使

$$0 < \gamma_\varepsilon \leq \gamma, \quad \gamma'_\varepsilon \geq 0, \quad \gamma_\varepsilon(s) = \alpha_\varepsilon \quad \text{for large } s, \quad (4.61)$$

其中

$$\alpha_\varepsilon := \varepsilon \underline{\gamma}_\infty + (1 - \varepsilon) \frac{1}{\tau} > \frac{1}{\tau}.$$

定义

$$\Gamma_\varepsilon(s) := \int_{v_*}^s \gamma_\varepsilon(\sigma) d\sigma. \quad (4.62)$$

由 $\gamma_\varepsilon \leq \gamma$ 和 $\gamma'_\varepsilon \geq 0$,

$$\mathcal{L}[\Gamma_\varepsilon(v)] \leq u\gamma_\varepsilon(v) \leq u\gamma(v) = \mathcal{L}[\Psi].$$

抛物比较原理及 Γ_ε 的尾部线性增长给出

$$v \leq \frac{1}{\alpha_\varepsilon} \Psi + C_\varepsilon. \quad (4.63)$$

由于

$$\kappa_\varepsilon := \tau - \frac{1}{\alpha_\varepsilon} > 0,$$

将上式代入第二关键恒等式可得

$$w + \kappa_\varepsilon \Psi \leq \tau \psi + C_\varepsilon. \quad (4.64)$$

因此,

$$\Psi \leq C\mathcal{A}^{-1}[\Psi] + C,$$

并由有限次预解算子迭代得到

$$\|\Psi(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|\Psi(t)\|_{L^1(\Omega)} + C. \quad (4.65)$$

于是, 关键仍是估计 $\|\Psi(t)\|_{L^1(\Omega)}$.

由于 γ' 可能变号, 单调递增情形中的耗散泛函不再适用. 由 (4.64) 可取 $K_0 > 0$ 使

$$\tau\psi - w + K_0 \geq 0.$$

沿用前文的 m 与 $\mathcal{K}$, 构造耦合未知量与辅助函数的新型泛函

$$\mathcal{F}(t) := \|\nabla \mathcal{K}[u(t) - m]\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u(t) (\tau\psi(t) - w(t) + K_0) dx + \tau\|\Psi(t)\|_{L^1(\Omega)}. \quad (4.66)$$

结合第一关键恒等式, 第二关键恒等式, 可得

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F} + \int_{\Omega} u^2 \gamma(v) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u \Psi dx + \|\Psi\|_{L^1(\Omega)} \leq C. \quad (4.67)$$

又由

$$\inf_{s \geq v_*} \gamma(s) > 0,$$

以及 Poincaré-Wirtinger 不等式和第二关键恒等式, 上述耗散项可从下方控制 $\mathcal{F}$. 因而存在 $c_0, C_0 > 0$ 使

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F} + c_0\mathcal{F} \leq C_0. \quad (4.68)$$

由 Gronwall 不等式,

$$\sup_{0 < t < T_{\max}} \|\Psi(t)\|_{L^1(\Omega)} < \infty. \quad (4.69)$$

结合 (4.65), 可依次获得 Ψ 与 v 的时间一致上界.

这一方法将尾部下包络, 预解算子迭代与耦合泛函结合起来: 前两者把点态控制归结为 Ψ 的 L^1 估计, 后者则克服 γ' 变号造成的符号困难并完成闭合. 对非单调但渐近衰减至零的运动性, 可改用递减尾部上包络, 并在相应的衰减速度和维数条件下回到单调递减情形的吸收机制.

4.5 不同运动性区域中的方法对应关系

为了突出各类证明在统一框架中的位置, 将主要方法对应关系概括如下:

模型与运动性	可比较量	主要闭合机制	直接目标
$\tau = 0, \gamma' \leq 0$	原函数 $\Gamma(v)$	非局部源项估计, 幂次迭代或指数可积性	v 的有限时间上界; 适当衰减条件下的时间一致上界
$\tau = 0, \gamma' \geq 0$	标量上, 下解	不变区间	v 的显式一致界
$\tau = 0$, 非单调且 $\bar{\gamma}_{\infty} = \infty$	增减分解与阈值 s_*	标量上解与比较原理	v 的一致上界
$\tau > 0, \gamma' \leq 0$	Ψ 与 $\Gamma(v)$	原函数吸收; 代数衰减下的 v - w 双向比较	v 的有限时间上界; 适当衰减条件下的时间一致上界
$\tau > 0, \gamma' \geq 0$	$\Gamma(v)$ 与 Ψ	预解算子迭代与耗散泛函	Ψ 与 v 的一致上界
$\tau > 0$, 非单调且尾部下界高于 $1/\tau$	尾部下包络与 $\tau\psi - w$	预解算子迭代与新型耦合泛函	Ψ 与 v 的一致上界

上述方法虽然依赖不同的单调性和尾部条件, 但均以两个关键恒等式为基础, 并通过相应的比较量和闭合机制获得信号变量的先验控制.

4.6 小结与后续衔接

本节整理了齐次模型中辅助函数比较方法的主要实现. 下一节说明由信号上界到密度估计的正则性提升; 非齐次模型留至第六节讨论.

5 由信号上界到高阶估计

一旦 v 及相关辅助量有界, γ 的尾部行为便不再起主要作用, 只需其在实际信号区间上的正性和局部正则性. 但 v 有界尚不能自动推出 $u \in L^\infty$; 还需控制非局部项, 建立 Hölder 正则性并完成积分自举.

本节仅说明基本机制, 细节参见 [20, Sections 3.2–3.3 & Section 4.2], [23, Section 6], [41, Section 3], [15, Section 3] 以及 [16, Section 5].

5.1 一般正则性提升机制

设 (u, v) 为 $[0, T_{\max})$ 上的经典解. 若对任意有限 $T > 0$,

$$\sup_{0 < t < \min\{T, T_{\max}\}} \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty, \quad (5.1)$$

则由 $v \geq v_* > 0$ 及 $\gamma > 0$ 的连续性, 存在 $\gamma_*(T), \gamma^*(T) > 0$ 使

$$\gamma_*(T) \leq \gamma(v(t, x)) \leq \gamma^*(T). \quad (5.2)$$

这就排除了运动性系数的有限时间退化或无界增长.

当 $\tau = 0$ 时, 由第一关键恒等式和 $u = \mathcal{A}[v]$ 可得

$$v_t - \gamma(v)\Delta v + \gamma(v)v = \mathcal{A}^{-1}[u\gamma(v)]. \quad (5.3)$$

且

$$0 \leq \mathcal{A}^{-1}[u\gamma(v)] \leq \gamma^*(T)v.$$

故 (5.3) 一致抛物且右端有界, 标准正则性理论 [27] 给出 v 的时空 Hölder 连续性, 进而

$$\gamma(v) \in C^{\alpha, \alpha/2},$$

可将

$$-\gamma(v(t, \cdot))\Delta$$

视为随时间 Hölder 连续的扇形算子. 非自治发展算子理论 [2], $u = \mathcal{A}[v]$ 与积分自举遂给出 u 的最大模估计.

当 $\tau > 0$ 时, 以

$$w = \mathcal{A}^{-1}[u]$$

作为正则性提升的中介. 第一关键恒等式可写为

$$w_t - \gamma(v)\Delta w + \gamma(v)w = \mathcal{A}^{-1}[u\gamma(v)]. \quad (5.4)$$

在 v, w 有界时, (5.4) 一致抛物, 局部能量估计给出 w 的 Hölder 连续性. 令 $r := \mathcal{A}^{-1}[v]$; 对信号方程作用 $\mathcal{A}^{-1}$ 得

$$\tau r_t + \mathcal{A}[r] = w.$$

线性抛物 Schauder 理论先提升 r , 再由 $v = \mathcal{A}[r]$ 得到 v 的时空 Hölder 连续性. 最后对 (5.4) 应用非自治发展算子理论, 并由 $u = \mathcal{A}[w]$ 将估计传递给密度变量.

有限时间估计给出整体延拓; 若估计在滑动时间区间上一致, 则进一步得到 u 的时间一致有界性.

5.2 递增运动性下对 $\gamma(v)u$ 的直接估计

对于单调递增的抛物-椭圆模型, 还可利用通量的封闭演化结构直接获得显式上界 [21, Section 5].

令

$$\varphi := u\gamma(v).$$

由

$$u_t = \Delta \varphi, \quad \mathcal{A}[v] = u,$$

可得

$$v_t = \mathcal{A}^{-1}[\varphi] - \varphi,$$

进而

$$\varphi_t = \gamma(v)\Delta \varphi + \frac{\gamma'(v)}{\gamma(v)}\varphi (\mathcal{A}^{-1}[\varphi] - \varphi). \quad (5.5)$$

设 $\gamma' \geq 0$ 在不变区间

$$\left[\min_{\Omega} v^{\text{in}}, \max_{\Omega} v^{\text{in}} \right]$$

上成立. 由预解算子的保序性和 L^∞ 压缩性,

$$\mathcal{A}^{-1}[\varphi] \leq \|\varphi(t)\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

代入 (5.5), 类似第 4.3.2 小节构造上解并应用比较原理可得

$$\|\gamma(v(t))u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\gamma(v^{\text{in}})u^{\text{in}}\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad t \geq 0. \quad (5.6)$$

由 v 的不变区间又有

$$\gamma(v(t, x)) \geq \gamma\left(\min_{\Omega} v^{\text{in}}\right) > 0.$$

因此,

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\|\gamma(v^{\text{in}})u^{\text{in}}\|_{L^\infty(\Omega)}}{\gamma(\min_{\overline{\Omega}} v^{\text{in}})}, \quad t \geq 0. \quad (5.7)$$

若进一步在该区间上有

$$\gamma'' \leq 0$$

则直接展开密度方程可得

$$u_t = \gamma(v)\Delta u + 2\gamma'(v)\nabla v \cdot \nabla u + u\gamma''(v)|\nabla v|^2 + u\gamma'(v)(v - u).$$

结合

$$v = \mathcal{A}^{-1}[u] \leq \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)},$$

及 $\gamma' \geq 0, \gamma'' \leq 0$, 对 u 应用比较原理得到

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u^{\text{in}}\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad t \geq 0. \quad (5.8)$$

这一方法绕开 Hölder 正则性和发展算子提升, 但依赖 $\mathcal{A}[v] = u$, 因而不能直接用于完全抛物模型.

6 非齐次阻尼的有界化作用与爆破抑制

考虑非齐次阻尼模型

$$\begin{cases} u_t = \Delta(\gamma(v)u) - uf(u), & x \in \Omega, \ t > 0, \\ \tau v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, \ t > 0, \\ \partial_\nu(\gamma(v)u) = \partial_\nu v = 0, & x \in \partial\Omega, \ t > 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

其中 $-uf(u)$ 描述密度依赖的净增长或衰减.

已有研究主要考虑标准或广义 Logistic 源项

$$-uf(u) = \lambda u - \mu u^\kappa, \quad \mu > 0, \quad \kappa > 1.$$

其有界性条件具有维数依赖: 二维抛物-椭圆情形中任意 $\kappa > 1$ 通常已足够, 高维则往往要求 $\kappa > 2$, 或在 $\kappa = 2$ 时要求阻尼系数充分大 [24, 11, 34, 31].

由此自然要问: 抑制退化运动性诱导的无穷大时间爆破, 是否必须依赖固定幕次的强阻尼?

6.1 弱超线性阻尼与主要结果

考虑如下弱超线性条件:

$$f \in C^1([0, \infty)), \quad \lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = \infty, \quad \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{\log s} < \infty. \quad (6.2)$$

它要求阻尼强度 $sf(s)$ 严格超线性, 但增长至多为 $s \log s$ 量级. 典型例子为

$$f(s) = a \log^\alpha(1+s) - b, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (6.3)$$

其中 $\alpha = 1$ 为 Gompertz 型阻尼, $0 < \alpha < 1$ 更弱.

在经典趋化交叉扩散模型中, 某些代数超线性乃至 Gompertz 型阻尼仍可能无法排除有限时间爆破 [38, 39]; 而在局部感知模型中, 弱超线性阻尼具有更强的长期正则化作用.

6.1.1 负指数运动性下的爆破抑制

先考虑齐次模型中可诱导无穷大时间无界性的负指数运动性.

定理 6.1 (负指数运动性下弱超线性阻尼的爆破抑制). 设 $N \in \{2, 3\}$, $\tau \geq 0$, 且

$$\gamma(s) = e^{-s}.$$

若 f 满足 (6.2), 则对任意满足前述非负性, 非平凡性和正则性条件的初值, 问题 (6.1) 存在唯一非负整体经典解, 并且

$$\sup_{t \geq 0} (\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) < \infty. \quad (6.4)$$

齐次系统可能产生无穷大时间无界解, 而上述至多 $u \log u$ 量级的阻尼已足以消除这一行为 [42].

6.1.2 一般正运动性下的抛物-椭圆结果

在抛物-椭圆情形中, 弱超线性阻尼还可与一般正运动性结合.

定理 6.2 (一般正运动性下弱超线性阻尼的有界性). 设 $\tau = 0$, $N \leq 3$, 并假设

$$\gamma \in C^3([0, \infty)), \quad \gamma(s) > 0, \quad s \geq 0.$$

若 f 满足 (6.2), 则问题 (6.1) 存在唯一非负整体经典解, 并且

$$\sup_{t \geq 0} (\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) < \infty. \quad (6.5)$$

这里不要求 γ 单调, 也不要求其具有正的尾部下界或确定的渐近趋势 [30].

两项结果表明, 弱超线性阻尼的正则化作用不依赖固定幂次的 Logistic 结构.

6.2 非齐次模型中的修正比较方法与熵闭合

对密度方程作用 $\mathcal{A}^{-1}$, 得到非齐次模型中的修正关键恒等式

$$w_t + \gamma(v)u + \mathcal{A}^{-1}[uf(u)] = \mathcal{A}^{-1}[\gamma(v)u]. \quad (6.6)$$

阻尼由此引入新的非局部反应项. 条件

$$f(s) \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty,$$

使 $sf(s)$ 具有超线性吸收作用, 可用于控制总质量和辅助量.

当 $\tau = 0$ 时 $v = w$, (6.6) 可直接用于信号估计. 若 γ 尾部有界, 超线性阻尼可吸收右端的非局部项; 若 γ 在无穷远处无界, 即

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = \infty,$$

则修正第 4.3.3 小节的阈值比较, 结合增减分解获得 v 的一致上界, 无需固定单调性 [30].

当 $\tau > 0$ 且 $\gamma(v) = e^{-v}$ 时, 修正恒等式先给出 w 的一致上界, 但 v 与 w 的比较不能直接闭合. 取 $b_0 \geq 0$ 使

$$sf(s) + b_0 \geq 0, \quad s \geq 0,$$

并定义辅助函数 h 为

$$\begin{cases} \tau h_t - \Delta h + h = \mathcal{A}^{-1}[uf(u) + b_0], & x \in \Omega, \ t > 0, \\ \partial_\nu h = 0, & x \in \partial\Omega, \ t > 0, \\ h(0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.7)$$

结合修正恒等式与信号方程可得

$$v \leq w + \tau h + C. \quad (6.8)$$

从而问题转化为控制 h [42].

条件

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{\log s} < \infty$$

保证

$$0 \leq uf(u) + b_0 \leq C(1 + u \log(1 + u)),$$

这与 $u \log u$ 型熵结构相匹配. 完全抛物情形中, 熵估计与抛物平滑给出 h 的上界, 再由 (6.8) 控制 v ; 抛物-椭圆情形中的信号比较本身仅需 $f(s) \rightarrow \infty$, 对数上增长条件主要用于控制 $uf(u)$ 的积分. 得到 v 上界后, 后续正则性提升与前节相同.

7 结语与展望

运动性退化、无界增长和非单调性造成了不同的解行为. 辅助函数比较方法通过关键恒等式、原函数、包络和耦合泛函优先控制信号; 此后再由 Hölder 正则性, 发展算子理论和积分自举控制密度. 这一框架已覆盖多类运动性, 但仍有若干基本空白.

首先, 齐次完全抛物模型在一般非单调运动性下的整体存在理论尚不完整. 现有方法尚未覆盖以下两类区域:

$$\underline{\gamma}_\infty = 0, \quad \frac{1}{\tau} \leq \bar{\gamma}_\infty < \infty,$$

以及

$$\bar{\gamma}_\infty = \infty, \quad 0 \leq \underline{\gamma}_\infty \leq \frac{1}{\tau}.$$

后一类还包含退化与无界交替的混合型运动性; 现有尾部包络方法均不能直接闭合.

其次, 临界有界性与长期行为仍缺乏完整刻画, 包括高维候选端点 $k = N/(N-2)$ 的临界性, 二维 $\gamma(s) = e^{-s^q}$ 在 $q > 1$ 时的行为, 两类模型中超临界机制的一致性, 以及无穷大时间无界解的增长率, 轮廓与质量集中结构. 非齐次模型中最弱阻尼条件的维数和退化速度依赖也有待澄清.

此外, 对更一般的信号依赖 Keller–Segel 系统

$$u_t = \Delta(\gamma(v)u) - \alpha \nabla \cdot (u \gamma'(v) \nabla v), \quad \alpha > 0,$$

如何统一处理局部感知与梯度感知之间的中间情形也值得研究. 辅助函数方法与对偶估计, Campanato 正则性, 半群理论和能量方法的结合, 有望形成更系统的信号依赖 Keller–Segel 方程分析框架.

致谢

作者感谢 Philippe Laurençot 和 Kentaro Fujie 长期以来在信号依赖运动性 Keller–Segel 系统方面的合作与有益讨论. 同时, 作者谨向郭柏灵院士, 郑宋穆教授, 王学锋教授, 杨小舟研究员和吴昊教授致以诚挚谢意, 感谢他们在作者从事相关研究的不同阶段给予的持续鼓励与支持.

参考文献

- [1] Ahn, J. and Yoon, C., Global well-posedness and stability of constant equilibria in parabolic–elliptic chemotaxis systems without gradient sensing, *Nonlinearity*, 2019, 32: 1327–1351.
- [2] Amann, H., *Linear and Quasilinear Parabolic Problems, Vol. I: Abstract Linear Theory*, Monographs in Mathematics, Vol. 89, Basel: Birkhäuser, 1995.

- [3] Andreucci, D., Cirillo, E.N.M., Colangeli, M. and Gabrielli, D., Fick and Fokker–Planck diffusion law in inhomogeneous media, *J. Stat. Phys.*, 2019, 174: 469–493.
- [4] Bellomo, N., Bellouquid, A., Tao, Y. and Winkler, M., Toward a mathematical theory of Keller–Segel models of pattern formation in biological tissues, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2015, 25(9): 1663–1763.
- [5] Bengfort, M., Malchow, H. and Hilker, F.M., The Fokker–Planck law of diffusion and pattern formation in heterogeneous environments, *J. Math. Biol.*, 2016, 73: 683–704.
- [6] Burger, M., Laurençot, P. and Trescases, A., Delayed blow-up for chemotaxis models with local sensing, *J. Lond. Math. Soc.*, 2021, 103: 1596–1617.
- [7] Choi, K.-H. and Kim, Y.-J., Chemotactic cell aggregation viewed as instability and phase separation, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2024, 80: 104147.
- [8] Choi, K.-H., Kim, Y.-J. and Lee, M.-G., Dweller–wanderer interaction for chemotactic phenomena, *SIAM J. Appl. Math.*, 2025, 85: 2167–2189.
- [9] Desvillettes, L., Laurençot, P., Trescases, A. and Winkler, M., Weak solutions to triangular cross diffusion systems modeling chemotaxis with local sensing, *Nonlinear Anal.*, 2023, 226: 113153.
- [10] Fu, X., Tang, L.-H., Liu, C., Huang, J.-D., Hwa, T. and Lenz, P., Stripe formation in bacterial systems with density-suppressed motility, *Phys. Rev. Lett.*, 2012, 108: 198102.
- [11] Fujie, K. and Jiang, J., Global existence for a kinetic model of pattern formation with density-suppressed motilities, *J. Differential Equations*, 2020, 269: 5338–5378.
- [12] Fujie, K. and Jiang, J., Boundedness of classical solutions to a degenerate Keller–Segel type model with signal-dependent motilities, *Acta Appl. Math.*, 2021, 176: Paper No. 3.
- [13] Fujie, K. and Jiang, J., Comparison methods for a Keller–Segel-type model of pattern formations with density-suppressed motilities, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 2021, 60: Paper No. 92.
- [14] Fujie, K. and Jiang, J., A note on construction of nonnegative initial data inducing unbounded solutions to some two-dimensional Keller–Segel systems, *Math. Eng.*, 2022, 4(6): 1–12.

- [15] Fujie, K. and Senba, T., Global existence and infinite time blow-up of classical solutions to chemotaxis systems of local sensing in higher dimensions, *Nonlinear Anal.*, 2022, 222: 112987.
- [16] Fujie, K. and Senba, T., Global boundedness of solutions to a parabolic–parabolic chemotaxis system with local sensing in higher dimensions, *Nonlinearity*, 2022, 35: 3777–3811.
- [17] Funaki, T., Izuhara, H., Mimura, M. and Urabe, C., A link between microscopic and macroscopic models of self-organized aggregation, *Netw. Heterog. Media*, 2012, 7: 705–740.
- [18] Horstmann, D. and Wang, G., Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions, *European J. Appl. Math.*, 2001, 12: 159–177.
- [19] Jiang, J., Boundedness and exponential stabilization in a parabolic–elliptic Keller–Segel model with signal-dependent motilities for local sensing chemotaxis, *Acta Math. Sci. Ser. B*, 2022, 42B(3): 825–846.
- [20] Jiang, J. and Laurençot, P., Global existence and uniform boundedness in a chemotaxis model with signal-dependent motility, *J. Differential Equations*, 2021, 299: 513–541.
- [21] Jiang, J. and Laurençot, P., Global bounded classical solutions to a parabolic–elliptic chemotaxis model with local sensing and asymptotically unbounded motility, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 2024, 56: 681–700.
- [22] Jiang, J. and Laurençot, P., Global boundedness induced by asymptotically non-degenerate motility in a fully parabolic chemotaxis model with local sensing, *Math. Nachr.*, in press.
- [23] Jiang, J., Laurençot, P. and Zhang, Y., Global existence, uniform boundedness, and stabilization in a chemotaxis system with density-suppressed motility and nutrient consumption, *Commun. Partial Differential Equations*, 2022, 47: 1024–1069.
- [24] Jin, H.-Y., Kim, Y.-J. and Wang, Z.-A., Boundedness, stabilization, and pattern formation driven by density-suppressed motility, *SIAM J. Appl. Math.*, 2018, 78: 1632–1657.
- [25] Jin, H.-Y. and Wang, Z.-A., Critical mass on the Keller–Segel system with signal-dependent motility, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2020, 148: 4855–4873.

- [26] Keller, E.F. and Segel, L.A., Model for chemotaxis, *J. Theoret. Biol.*, 1971, 30: 225–234.
- [27] Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A. and Ural'tseva, N.N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, Providence, RI: American Mathematical Society, 1968.
- [28] Li, H. and Jiang, J., Global existence of weak solutions to a signal-dependent Keller–Segel model for local sensing chemotaxis, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2021, 61: 103338.
- [29] Liu, C., Fu, X., Liu, L., Ren, X., Chau, C.K.L., Li, S., Xiang, L., Zeng, H., Chen, G., Tang, L.-H., Lenz, P., Cui, X., Huang, W., Hwa, T. and Huang, J.-D., Sequential establishment of stripe patterns in an expanding cell population, *Science*, 2011, 334: 238–241.
- [30] Lu, A. and Jiang, J., Suppression of blowup by slightly superlinear degradation in a parabolic–elliptic Keller–Segel system with signal-dependent motility, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2025, 81: 104190.
- [31] Lyu, W. and Wang, Z.-A., Logistic damping effect in chemotaxis models with density-suppressed motility, *Adv. Nonlinear Anal.*, 2023, 12: 336–355.
- [32] Nanjundiah, V., Chemotaxis, signal relaying and aggregation morphology, *J. Theoret. Biol.*, 1973, 42: 63–105.
- [33] Tao, Y.S. and Winkler, M., Effects of signal-dependent motilities in a Keller–Segel-type reaction-diffusion system, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2017, 27(9): 1645–1683.
- [34] Wang, J. and Wang, M., Boundedness in the higher-dimensional Keller–Segel model with signal-dependent motility and logistic growth, *J. Math. Phys.*, 2019, 60: 011507.
- [35] Wang, X.L., Liu, C.L., Fu, X.F. and Huang, J.D., Synthetic Biology: a New Means of Biological Pattern Formation Study, *Scientia Sinica Vitae*, 2015, 45: 928–934 (in Chinese).
- [36] Wang, Z.-A., On the parabolic–elliptic Keller–Segel system with signal-dependent motilities: a paradigm for global boundedness and steady states, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2021, 44: 10881–10898.

- [37] Wang, Z.-A. and Zheng, J., Global boundedness of the fully parabolic Keller–Segel system with signal-dependent motilities, *Acta Appl. Math.*, 2021, 171: Paper No. 25, 19 pp.
- [38] Winkler, M., Blow-up in a higher-dimensional chemotaxis system despite logistic growth restriction, *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, 384: 261–272.
- [39] Winkler, M., Finite-time blow-up in low-dimensional Keller–Segel systems with logistic-type superlinear degradation, *Z. Angew. Math. Phys.*, 2018, 69: Article No. 40.
- [40] Winkler, M., Effects of degeneracies in taxis-driven evolution, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2025, 35: 283–343.
- [41] Xiao, Y. and Jiang, J., Global existence and uniform boundedness in a fully parabolic Keller–Segel system with non-monotonic signal-dependent motility, *J. Differential Equations*, 2023, 354: 403–429.
- [42] Xiao, Y. and Jiang, J., Prevention of infinite-time blowup by slightly super-linear degradation in a Keller–Segel system with density-suppressed motility, *Nonlinearity*, 2024, 37: 095007.
- [43] Yoon, C. and Kim, Y.-J., Global existence and aggregation in a Keller–Segel model with Fokker–Planck diffusion, *Acta Appl. Math.*, 2017, 149: 101–123.